Lezione 9 c2

lunedì 13 aprile 2026 14:24

Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Richiamo

<u>Teorema</u> (Cauchy)

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a, b]$
e derivabili su $]a, b[$

tale che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora $\exists\, c \in]a, b[$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

<u>Teorema</u> (De l'Hopital - 1°)

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ tali che

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x)$

(2) f, g derivabili tale che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

(3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finito o meno)

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\left(\frac{0}{0}\ \text{f.i.}\right)$

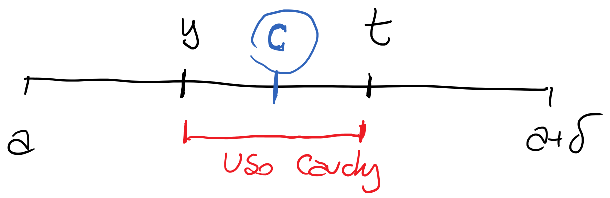
$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Dim (Ip) (3) $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$ (caso particolare)

ossia

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\implies$

$$\boxed{l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon} \quad (*)$$



Siano $y, t \in \,]a, a+\delta[$ con $y < t$ e uso il teorema di Cauchy $f, g : [y, t] \to \mathbb{R}$

$$\exists \, c \in \,]y, t[\, : \quad \frac{f(t) - f(y)}{g(t) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Poiché $c \in \,]a, a+\delta[$ scrivo $(*)$ con $x = c$

ossia

$$l - \varepsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < l + \varepsilon$$

$l -$ $f(t) - f(y)$ $l +$

$$\overline{g(t) - g(y)} < l + \varepsilon$$

Dalla permanenza del segno

$$l - \varepsilon < \lim_{y \to a^+} \frac{f(t) - f(y)}{g(t) - g(y)} < l + \varepsilon$$

Da (1)

$$l - \varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < l + \varepsilon \qquad \forall t \in]a, a+\delta[$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t \to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = l$$

Teorema (De L'Hopital - 2°)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$

(2) f, g derivabili con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

(3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finito o meno)

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esempio $\quad \lim \frac{\operatorname{sen} x}{} = \left(\frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ f. i.} \right)$

Esempio $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(\frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$

De l'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

Esempio $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{1 - \cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ f.i} \right)$

De l'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{2x} =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Ricordo:

$f(x)$ si dice derivabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Punti di Non Derivabilità

Df (punti angolosi)

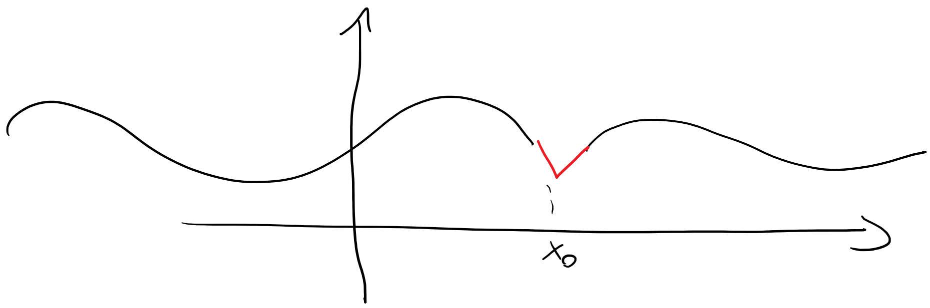
Un punto x_0 si dice angoloso per $f(x)$ se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$$

ma $\quad l_1 \neq l_2$

Graficamente :



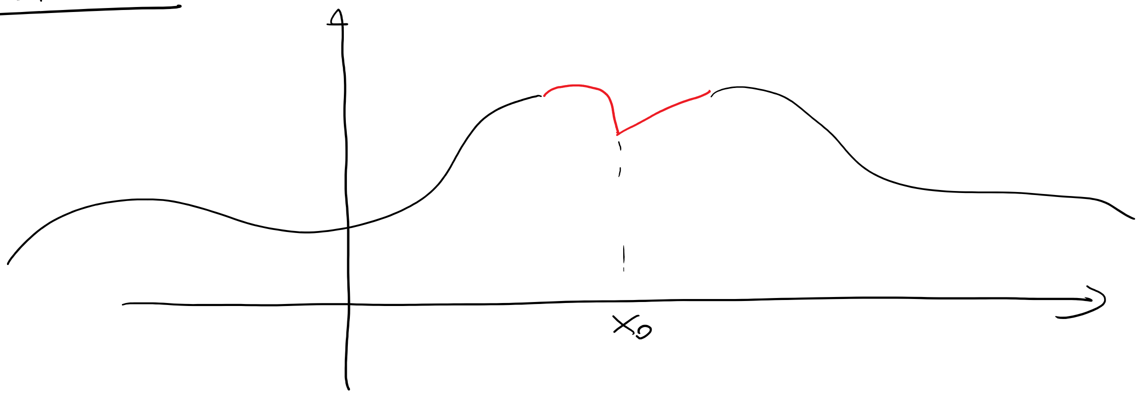
Def (Punti cuspidali)

Un punto x_0 si dice cuspidale per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ ma almeno uno dei due limite è $\pm\infty$!!!

Graficamente

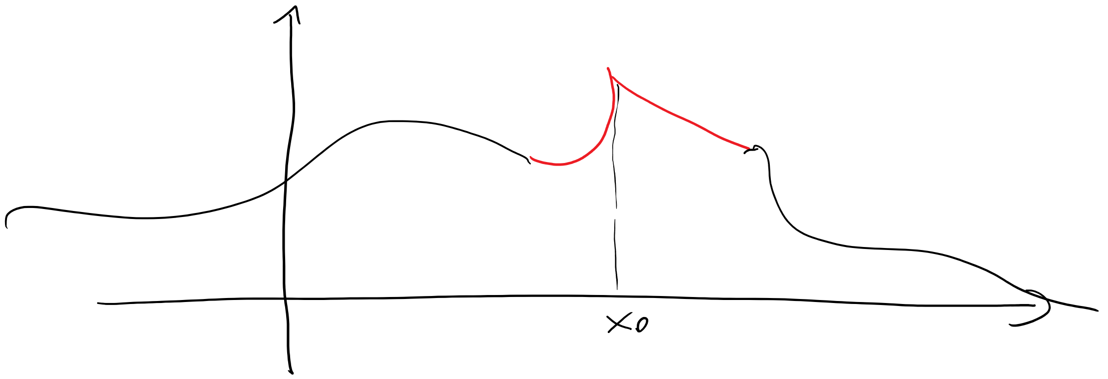


siamo nel caso in cui $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

$$\lim \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{} \quad \ldots$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\quad}{x - x_0} = x \in \mathbb{R}$$

Altro caso



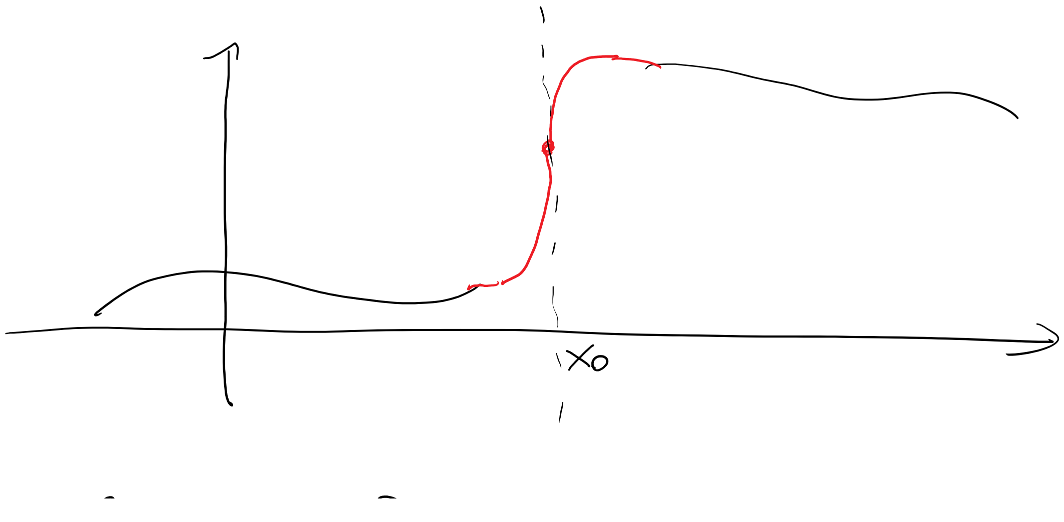
siamo nel caso in cui $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

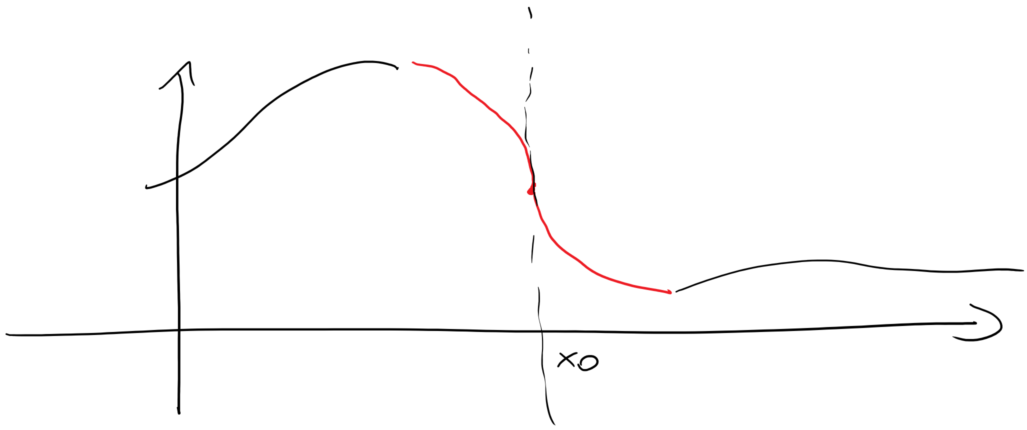
<u>Def</u> (Punti a tangenza verticale)

Un punto x_0 si dice a <u>tangenza verticale</u> per $f(x)$ se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

<u>Graficamente</u> caso $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$



Caso $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$



Grazie al teorema di De l'Hopital, possiamo capire la natura dei punti di non derivabilità attraverso un limite più semplice

Teorema (Natura dei punti di non derivabilità)

sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$

Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

(Finito o meno)

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Come usare il teorema:

Se x_0 è discontinuità di 1ª specie $f'(x)$

$\Longrightarrow$ x_0 è angoloso per $f(x)$

se x_0 è discontinuità di 2ª specie per $f'(x)$
$\Rightarrow$ x_0 è cuspidale per $f(x)$

se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm \infty \Rightarrow x_0$ punto a tang. verticale

Derivate di ordine superiore

Sia $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile

allora nasce la funzione derivata prima $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$

se tale funzione è ulteriormente derivabile, definiamo derivata seconda di $f(x)$ come

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Più in generale, se $n \in \mathbb{N}$, definiamo la derivata di ordine n di $f(x)$ come

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

Funzioni Convesse

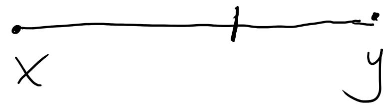
Def Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x)$ si dice convessa su (a,b) se $\forall x,y \in (a,b)$ con $x<y$ vale

$$\boxed{f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall t \in [0,1]}$$

significato geometrico:

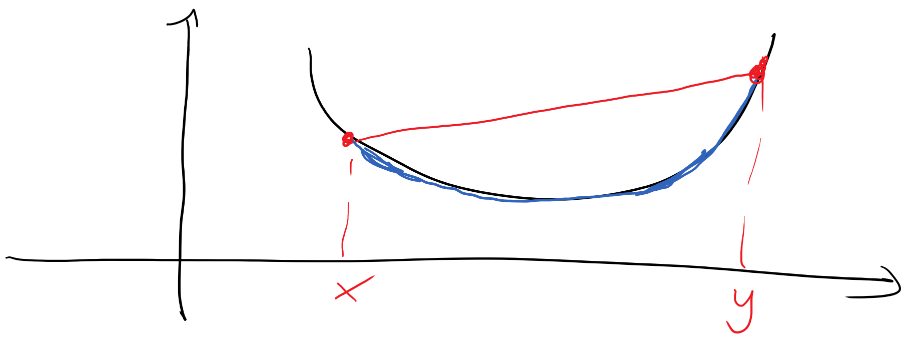
(1) Notiamo che i punti del tipo $tx+(1-t)y$ rappresentano tutti e soli i punti dell'intervallo $[x,y]$ $(t \in [0,1])$

$tx+(1-t)y$ per qualche $t \in [0,1]$

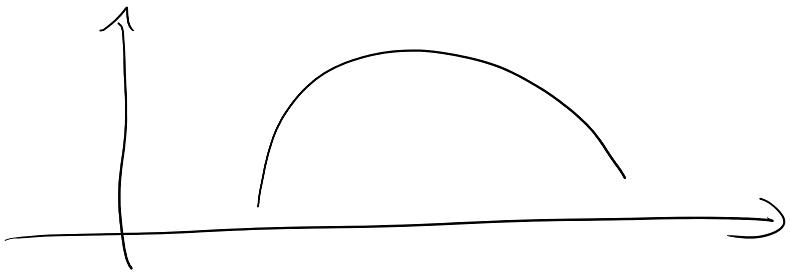


(2) La definizione di funzione convessa ci dice che il grafico della funzione presa nell'intervallo $[x,y]$ sta al di sotto dei punti del segmento congiungente $f(x)$ e $f(y)$

Graficamente



<u>Def</u> $f(x)$ si dice <u>concava</u> se $-f(x)$ è convessa



<u>Teorema</u> (Convessità attraverso la derivata prima)

sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$. Allora

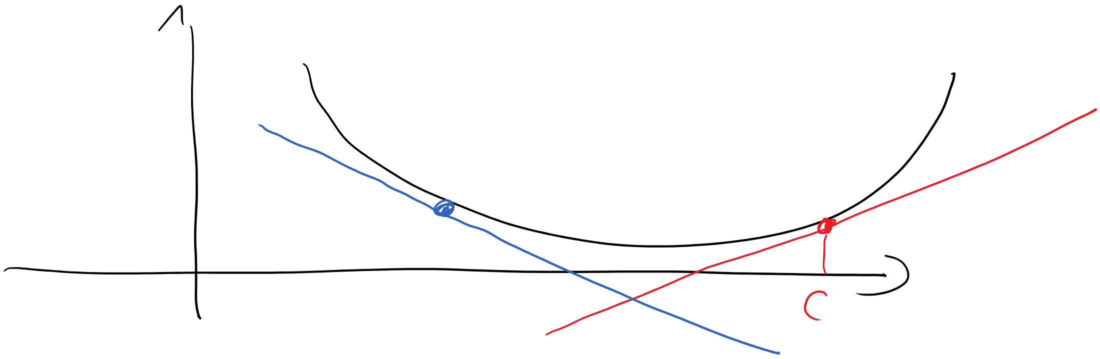
$f(x)$ convessa su (a,b) $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in]a,b[$

$$\underbrace{f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)}$$

$\forall x \in]a,b[$

eq.ne retta tangente al grafico di f in c

Graficamente



Teorema (Convessità attraverso derivata seconda)

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile 2-volte su (a,b). Allora

$f(x)$ è convessa su (a,b) $\iff$ $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Def (Punto di flesso)

Un punto $x_0 \in (a,b)$ si dice di flesso per $f(x)$ se $\exists r > 0$

(1) $f(x)$ convessa $]x_0 - r, x_0[$ e $f(x)$ è concava in $]x_0, x_0+r[$

oppure

(2) $f(x)$ è concava in $]x_0 - r, x_0[$ e $f(x)$ è convessa in $]x_0, x_0+r[$

Teorema (punti estremi rel attraverso derivate ordine superiore)

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n-volte su (a,b) e sia $x_0 \in]a,b[$ tale che

$f'(x_0) = f''(x_0) \quad f^{(n-1)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ma $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

n pari
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è min. rel.
- $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è max. rel.

n dispari
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ è crescente in $]x_0 - r, x_0 + r[$
- $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ è decrescente in $]x_0 - r, x_0 + r[$

Teorema (Flessi attraverso derivate di ordine superiore)

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n-volte su (a,b), e sia $x_0 \in]a,b[$ tale che

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

mentre $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Allora

n pari
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ è convessa in $]x_0 - r, x_0 + r[$
- $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ è concava in $]x_0 - r, x_0 + r[$

n dispari $\Longrightarrow x_0$ è punto di flesso

Esercizio Determinare l'immagine della funzione

$$F(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$CE = \mathbb{R} = \,]-\infty, +\infty[$$

Ricordo, essendo $F(x)$ continua su $\mathbb{R}$, dal teorema di Darboux

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} F = \left(\inf_{\mathbb{R}} f , \sup_{\mathbb{R}} f \right)$$

Monotonia di $F(x)$: $\left(\boxed{f'(x) \geq 0} \right)$

$$F(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$F'(x) = 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 2x + 1 =$$

$$= 9x^2 + 4x + 1$$

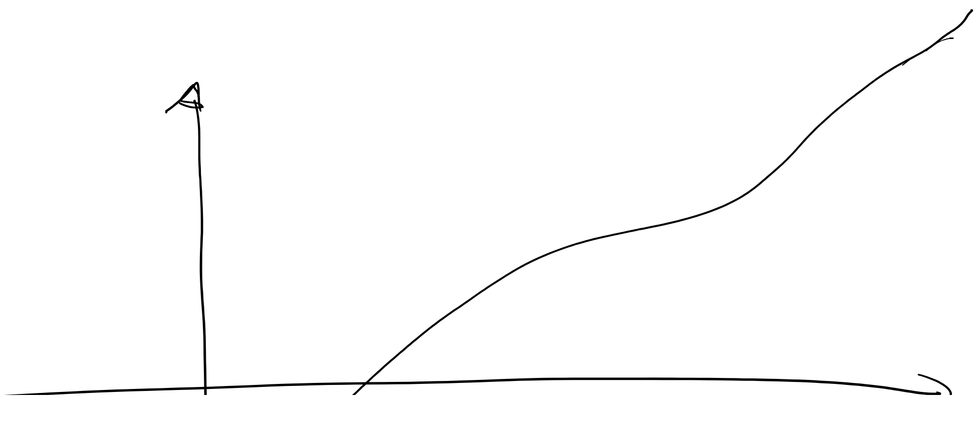
$$f'(x) \geq 0 \iff 9x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

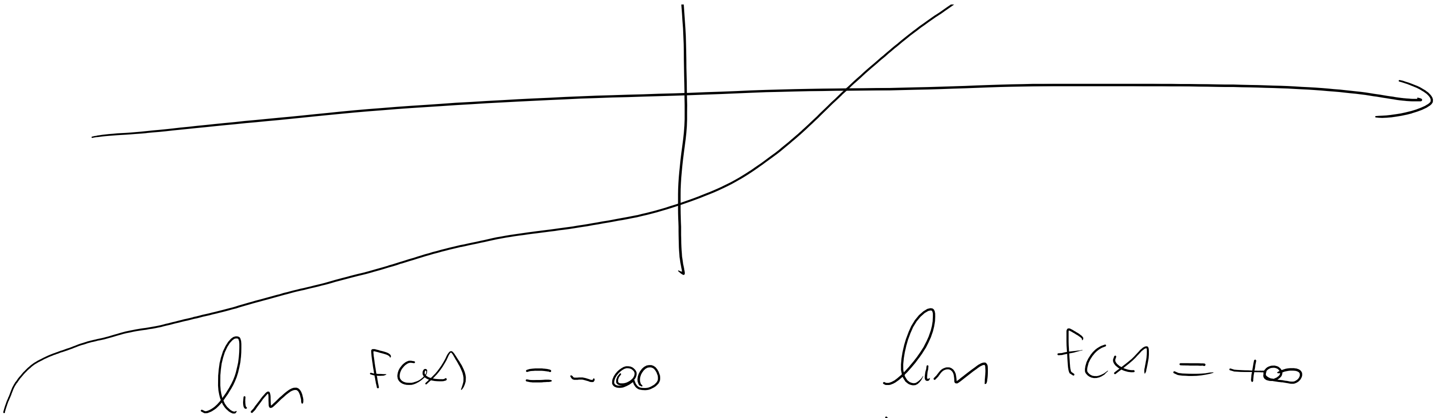
$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 9 = 16 - 36 < 0$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ sempre

$\Rightarrow F(x)$ è sempre crescente

<u>Grafico</u>





$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f(x) = -\infty \quad e \quad \sup_{\mathbb{R}} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

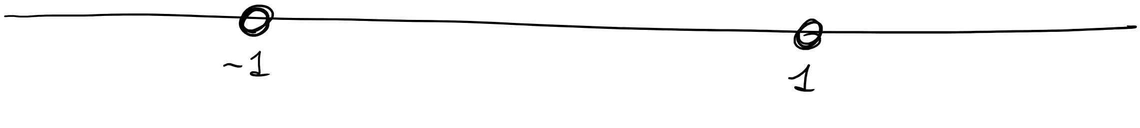
Esercizio

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \qquad \text{(Trovare l'immagine)}$$

CE $x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

ossia

CE $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$



Studio Monotonia $\boxed{f'(x) \geq 0}$

Richiamo
$$\boxed{\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}}$$

Da cui

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-1) - x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x}{(x^2-1)^2}\left[\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}\right] =$$

$$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \geq 0 \quad \text{(segni concordi)}$$

essendo $(x^2-1)^2 \geq 0$ sempre $\iff -2x \geq 0$

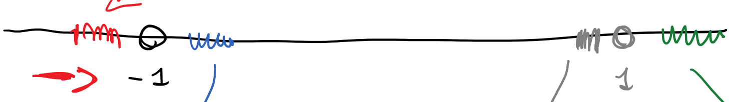
$$\iff x \leq 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce in $]-\infty, -1[\,\cup\,]-1, 0[$

$f(x)$ decresce in $]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0} = \infty \text{ segno?}\right) = +\infty$$

$$x^2-1 \geq 0 \iff x \leq -1 \;\cup\; x \geq 1$$

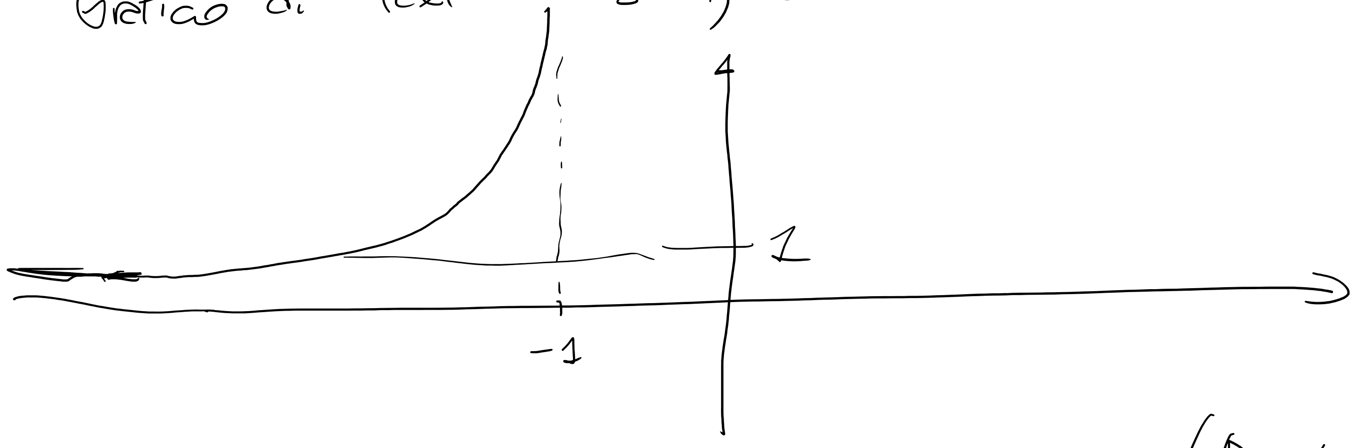


$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \quad \text{De } \underline{\text{l'Hop}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = 1$$

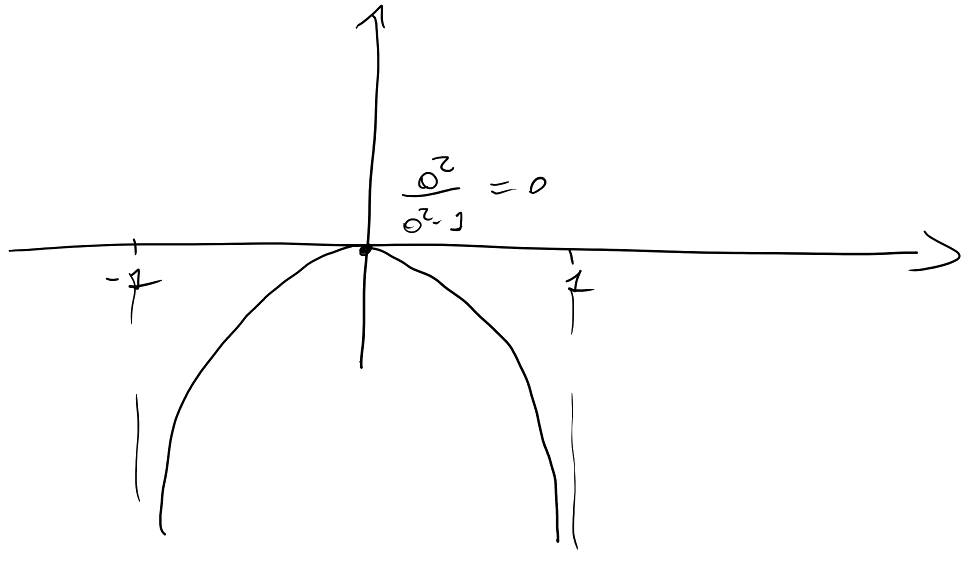
Grafico di $f(x)$ in $]-\infty, -1[$



(Darboux)

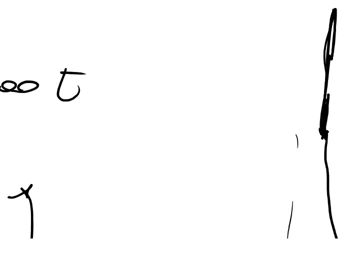
$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im}_{]-\infty,-1[} f =]1, +\infty[$$

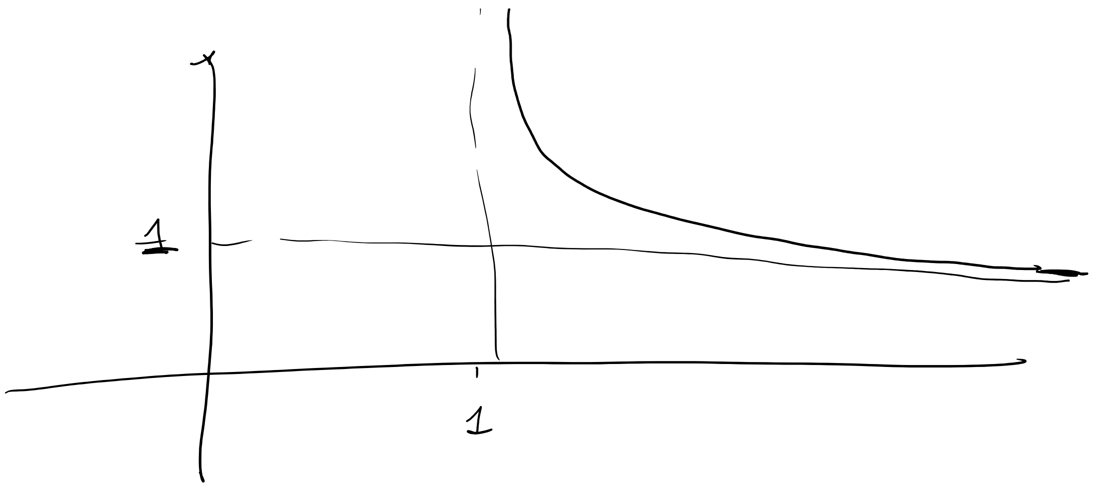
In $]-1, 1[$ grafico



$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im}_{]-1,1[} f =]-\infty, 0]$$

Grafico in $]1, +\infty[$





$\Longrightarrow \mathrm{Im} f =]1, +\infty[$

$]1, +\infty[$

Concludo $\quad \mathrm{Im} f =]1, +\infty[\cup]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

$=]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$